Biforcazioni dei Sistemi Dinamici: Alcuni Esempi in Economia

José Carlos Valverde

Università di Castilla-La Mancha, SPAGNA.

17 Febbraio 2005, Macerata, ITALIA.

Introduzione

Introduzione

MOTIVAZIONE DELLO STUDIO DEI SISTEMI DINAMICI

L'obiettivo esenziale di un Sistema Dinamico è rappresentare un modello della realtà per poter estrarre conclusioni sul comportamento futuro di quello.

Introduzione

MOTIVAZIONE DELLO STUDIO DEI SISTEMI DINAMICI

Certamente, il grande interesse che svegliano i Sistemi Dinamici è dovuto senza dubbio a che una grande diversità di problemi delle Scienzie come la Biología, la Física, la Química, l'Ingeniería o *l'Economia* possono essere rappresentati per equazioni alle differenze finite della forma

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{oppure} \qquad (x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$$

dove la non linearità della funzione continua f è di solito il piu caratteristico

Introduzione

MOTIVAZIONE DELLO STUDIO DEI SISTEMI DINAMICI

È per tutto questo che sono diventati una delle piu studiate aree non soltanto nell´ambito della Matematica, ma anche nell´ambito *dell'Economia*.

Introducción

CONTENUTI DEL SEMINARIO

- Generalità dei Sistemi Dinamici
- Biforcazioni dei Sistemi Dinamici
- Alcuni esempi in Economia
- Conclusioni
- Lavoro Futuro
- Bibliografia

Generalità dei Sistemi Dinamici

Generalità dei Sistemi Dinamici

Definizione. Un *sistema dinámico* è una terna (X, T, Φ) dove

X: Spazio metrico chiamato *spazio degli stati*,

T: Semigrupo additivo di $\mathbb{R}$ chiamato *insieme di tempi*,

Φ: Funzione continua chiamata *flusso* o *operatore di evoluzione* e valgono le successive condizioni:

$$\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in X, \text{ i.e., } \Phi_0(x) = id_X$$
$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x) \quad \forall t, s \in T, \forall x \in X$$

Se l´insieme di tempi

$$T = \mathbb{Z} \ (\mathbb{N} \cup \{0\} \text{ o } \mathbb{Z}^- \cup \{0\}) \quad \rightsquigarrow \quad \textit{Sistema discreto}$$

Generalità dei Sistemi Dinamici

Un *sistema associato* a una funzione $f : X \to X$ continua, é il sistema (X, T, Φ) dato da

X: Spazio metrico

T: $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (o $\mathbb{Z}$ quando si tratta di un homeomorfismo)

Φ: $T \times X \to X$ con

$$\Phi(n, x) = \Phi_n(x) = f^n(x)$$

dove $f^0(x) = id_X$ y $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $n \geq 1$.

Generalità dei Sistemi Dinamici

Modelli unidimensionali

- *L'equazione logistica*

$$f(x,\mu) = \mu x(1-x)$$

- Il *modello* di May

$$f(x,\mu) = \mu - x^2$$

- Il *modello di Ricker*

$$f(x,\mu) = \mu x e^{-x}$$

- Un modello epidemiologico

$$f(x,\mu) = (1-x)(1-e^{-\mu x})$$

Generalità dei Sistemi Dinamici

Modelli bidimensionali

- *L'equazione logistica ritardata*,

$$f(x, y; \mu) = (y, \mu y(1 - x))$$

- Il *modello preda-predatore* discreto,

$$f(x, y; \mu) = (\mu x(1 - x - y), \mu xy)$$

- Il modello *modello di Cournot*

$$F(x, y; \mu) = (f(y; \mu), g(x; \mu))$$

Generalità dei Sistemi Dinamici

Problemi Fondamentali nello studio dei Sistemi Dinamici

- È affidabile il modello?, i.e., risponde a quello che realmente succede?
- Con la funzione ottenuta, possiamo predire l'evoluzione per valori grandi di tempo?
- Riponderemo della stessa forma alle domande prime se sostituiamo quella f con un´altra un po' diversa. (Stabilità Strutturale).

Generalità dei Sistemi Dinamici

Definizione. Si dice che $(\mathbb{R}^m, f)$ è *localmente (topologicamente) coniugato* a $(\mathbb{R}^m, g)$ circa l'origine se esiste un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definito in un intorno U di $x = 0$ del quale si abbia che $h(U) = V$ è un intorno di $y = 0$, che porta orbite del primo sistema in U a orbite del secondo sistema in V, mantenendo la direzione del tempo.

Generalità dei Sistemi Dinamici

Se consideriamo famiglie uniparametriche di funzioni definite in $\mathbb{R}^n$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

una *biforcazione locale* è l'apparizione di sistemi che non sono (localmente) topologicamente coniugati dentro alla famiglia quando muoviamo il parametro.

Ma, come possiamo sapere che c´è una biforcazione piu facilmente? Esaminaremo alcuni concetti che ci auiteranno.

Generalità dei Sistemi Dinamici

Sistema Dinamico Discreto associato a una funzione f

$$x \rightsquigarrow f(x), \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

- (Forward)-Traiettoria

$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \dots\}$$

- (Backward)-Traiettoria

$$\{x_0, x_{-1} = f^{-1}(x_0), x_{-2} = f^{-1}(x_{-1}) = f^{-2}(x_0), \dots\}$$

Non è unica se la funzione non è invertibile.

Generalità dei Sistemi Dinamici

Traiettorie importanti

- x_0 punto fisso

$$x_0 = f(x_0)$$

- x_0 punto n-periodico

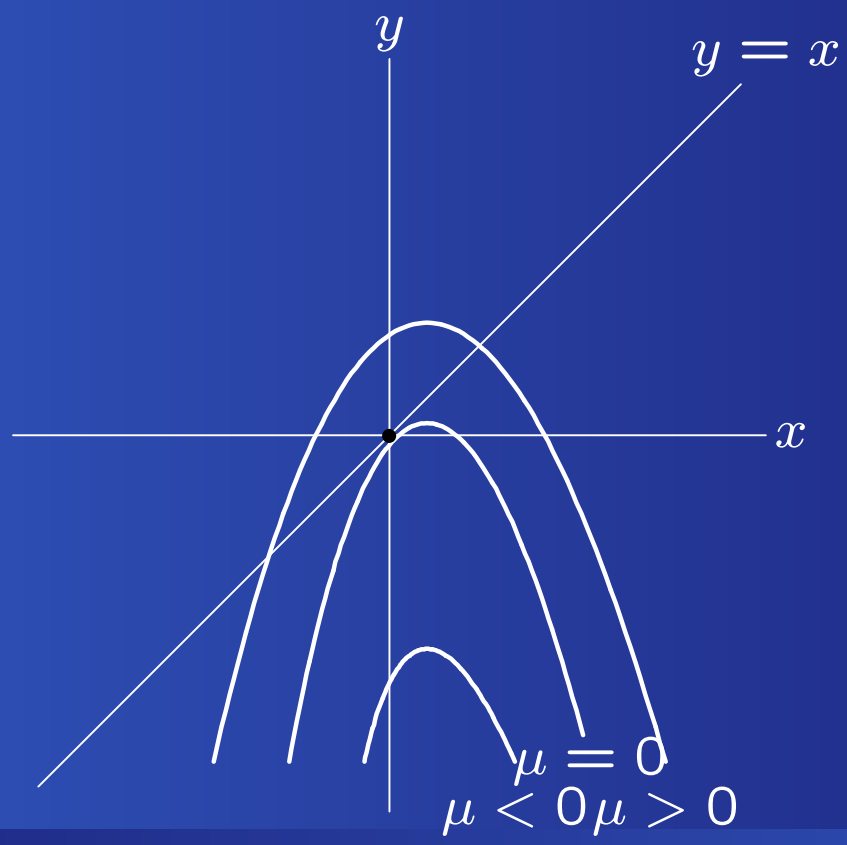
$x_0 = f(f(\dots f(x_0))) = f^n(x_0)$ ma anche $f^k(x_0) \neq x_0, k < n$

Punti n-periodici sono punti fissi di f^n e possono essere studiati nello stesso modo

Generalità dei Sistemi Dinamici

Esampio. Se consideriamo la famiglia uniparametrica

$f(x, \mu) = x + \mu - x^2$



Generalità dei Sistemi Dinamici

In un intorno di $x = 0$:

- $\mu > 0 \rightsquigarrow f(x, \mu)$ ci sono due punti fissi.
- $\mu = 0 \rightsquigarrow f(x, \mu)$ c´è un punto fisso instabile.
- $\mu < 0 \rightsquigarrow f(x, \mu)$ non c´è nessun punto fisso.

Generalità dei Sistemi Dinamici

Stabilità dei punti fissi

Se x_0 è un punto fisso e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono suoi autovalori e della matrice Jacobiana

- Se $|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, allora x_0 è stabile.
- Se esiste λ_i che verifica $|\lambda_i| > 1$, allora x_0 è instabile.

Quindi, se gli autovalori hanno tutti valore assoluto diverso da 1 la stabilità può essere facilmente calcolata e si dice che x_0 e un punto iperbolico.

Generalità dei Sistemi Dinamici

Definizione. Si dice che un punto fisso x_0 è non-iperbolico se esiste qualunque autovalore λ_i tale che $|\lambda_i| = 1$.

- La stabilità non può essere facilmente calcolata, (eccetto nel caso che qualche λ_i sia tale che $|\lambda_i| > 1$)
- Infatti, qualunque intorno di x_0, puó avere
  - punti cui orbite si alontanano da $x_0 \rightsquigarrow$ (Varietà stabile)
  - punti cui orbite si avicinano a $x_0 \rightsquigarrow$ (Varietà instabile)
- La sua presenza è condizione neccesaria per una biforcazione locale (Teorema di Hartman-Grobman)

Generalità dei Sistemi Dinamici

Varietà Stabile, Instabile e Centrale

- Locale
  - $W^s_{loc} = \{x \in U | f^h(x) \to x_0, h \to \infty, f^h(x) \in U, \forall h \geq 0\}$
  - $W^u_{loc} = \{x \in U | f^{-h}(x) \to x_0, h \to \infty, f^{-h}(x) \in U, \forall h \geq 0\}$
  - W^c_{loc} non si può definire in questo modo e non è sempre differenziabile
- Globale
  - $W^s = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(W^s_{loc})$
  - $W^u = \bigcup_{k \geq 0} f^{k}(W^u_{loc})$
  - W^c non si può definire in questo modo e non è sempre differenziabile

Biforcazioni dei Sistemi Dinamici

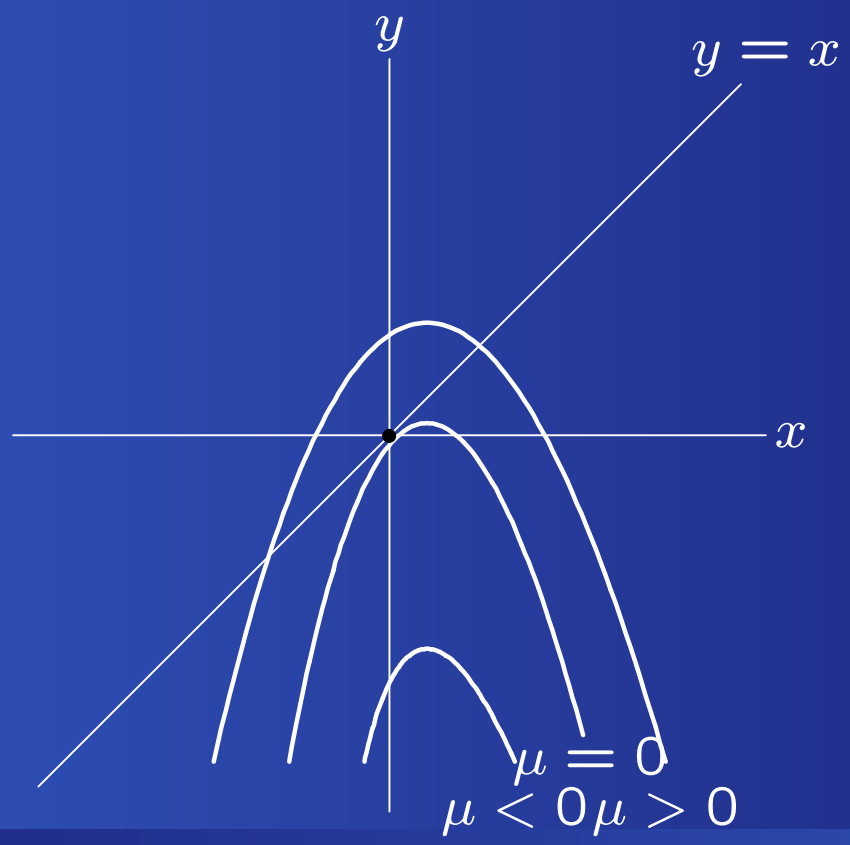
Biforcazioni dei Sistemi Dinamici

Le biforcazioni (locali) piu importanti si basano sul cambio nella stabilita dei punti fissi oppure nel numero di punti fissi.

- Famiglie uniparametriche di sistemi unidimensionali:
  - Autovalore 1 $\Rightarrow$ Biforcazioni Fold, Transcritical e Pitchfork.
  - Autovalore -1 $\Rightarrow$ Biforcazione Flip.
- Famiglie uniparametriche di sistemi bidimensionali
  - Autovalori complessi conigati $\Rightarrow$ Biforcazioni Neimark-Sacker.

Biforcazione Fold

La curva di punti fissi della famiglia è una parabola tangente al punto di biforcazione nel piano (x, μ).



Biforcazione Fold

Teorema. (Classico) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^2, che presenta in $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$ con autovalore 1.
Supposto che la familia soddisfa le condizioni:

1. $f_{xx}(0,0) \neq 0$
2. $f_{\mu}(0,0) \neq 0$

Allora f presenta una biforcazione fold.

Biforcazione Fold

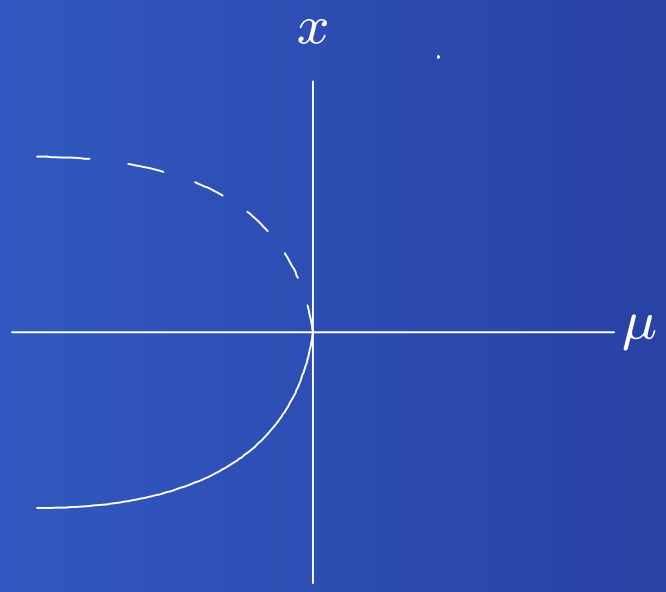
Teorema.(Nuovo) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^{2n}, che presenta in $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$ e tale che $f_x(0,0) = 1$.
Supposto che la famiglia soddisfa le condizioni:

1. $f_{xx}(0,0) = f_{xxx}(0,0) = \ldots = f_{x^{2n-1}}(0,0) = 0$, $f_{x^{2n}}(0,0) \neq 0$
2. $f_\mu(0,0) \neq 0$

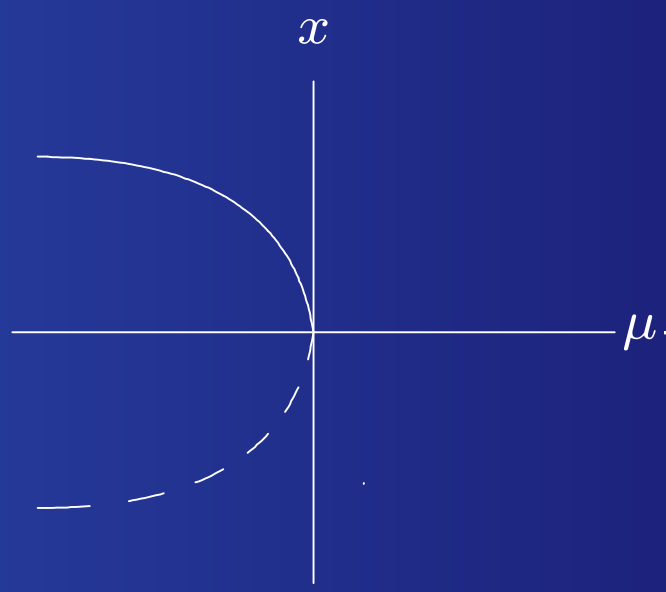
Allora f presenta una biforcazione fold.

Biforcazione Fold

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——



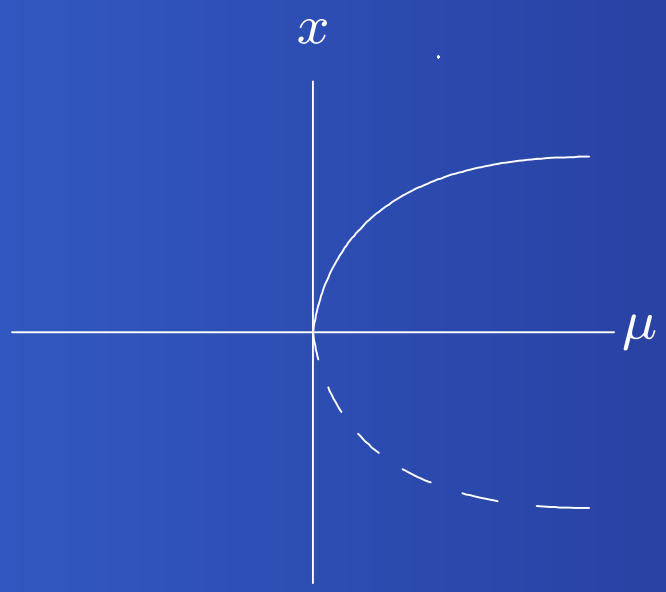
$f_{x^{2n}}(0,0) > 0,\ f_{\mu}(0,0) > 0$



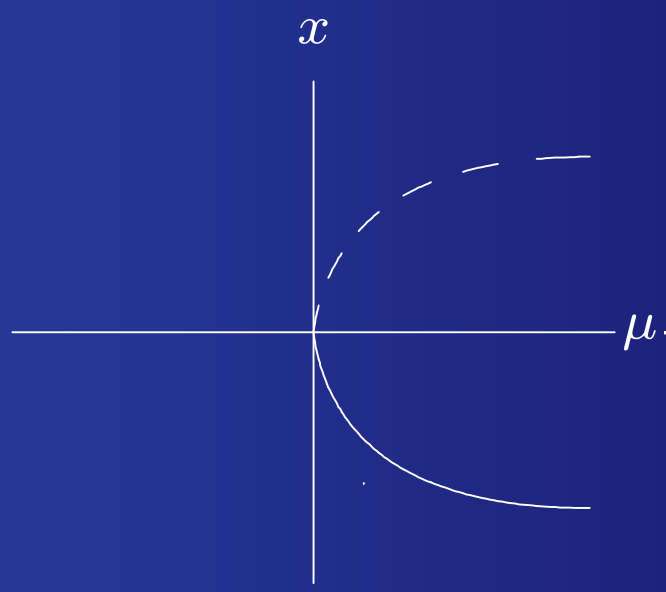
$f_{x^{2n}}(0,0) < 0,\ f_{\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Fold

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——



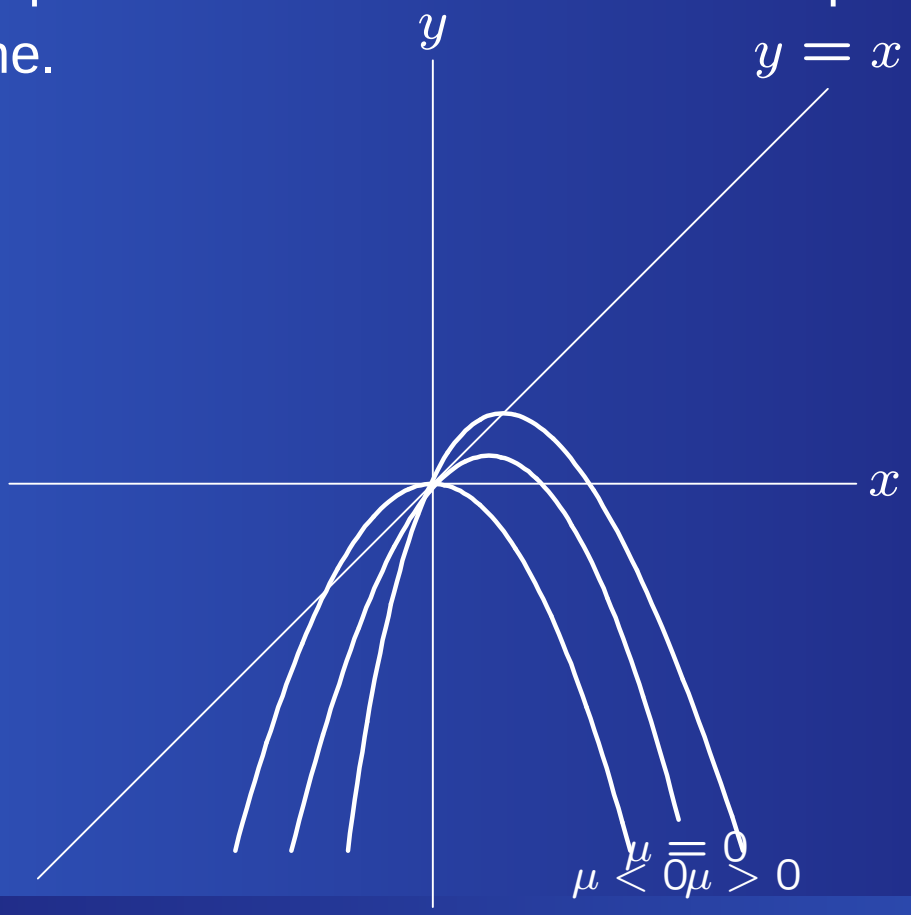
$f_{x^{2n}}(0,0) < 0,\ f_{\mu}(0,0) > 0$



$f_{x^{2n}}(0,0) > 0,\ f_{\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Transcrítica

La famiglia ha due curve di punti fissi nel piano x, μ che passano per l'origine di detto piano e cambiano la stabilità dei punti fissi quando passano l'origine.



Biforcazione Transcritica

Teorema. (Classico) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^2, che presenta nella funzione corrispondente al valore parametrico $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$ e tale che $f_x(0,0) = 1$.
Supposto che la famiglia soddisfa le condizioni:

1. $f_{xx}(0,0) \neq 0$
2. $f_{x\mu}(0,0) \neq 0$

Allora f presenta una biforcazione transcritica.

Biforcazione Transcritica

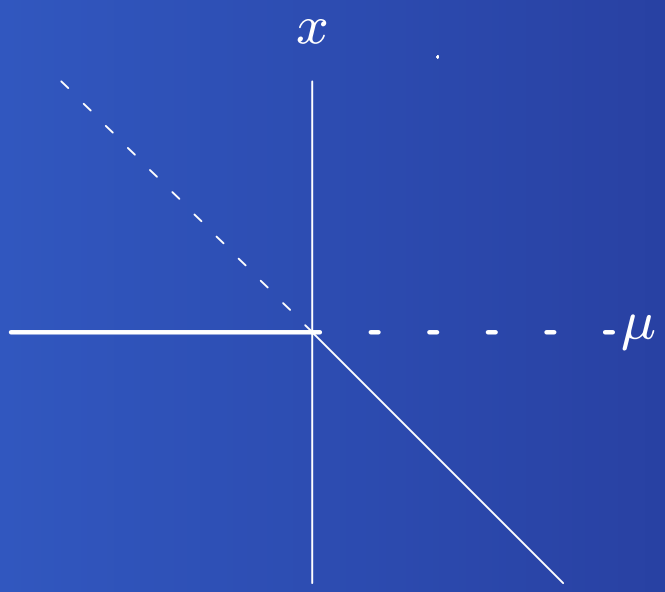
Teorema.(Nuovo) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, f di classe C^{2n+1}, che presenta nella funzione corrispondente al valore parametrico $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$ y tale che $f_x(0,0) = 1$, $f_\mu(0,0) = 0$.
Supposto che la famiglia soddisfa le condizioni:

1. $f_{xx}(0,0) = f_{xxx}(0,0) = \cdots = f_{x^{2n-1}}(0,0) = 0$, $f_{x^{2n}}(0,0) \neq 0$
2. $f_{x\mu}(0,0) \neq 0$

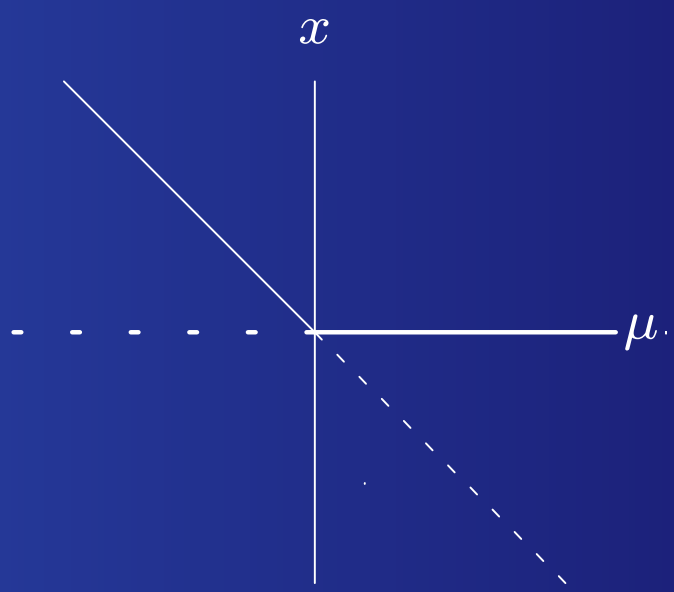
Allora f presenta una biforcazione transcritica.

Biforcazione Transcritica

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——



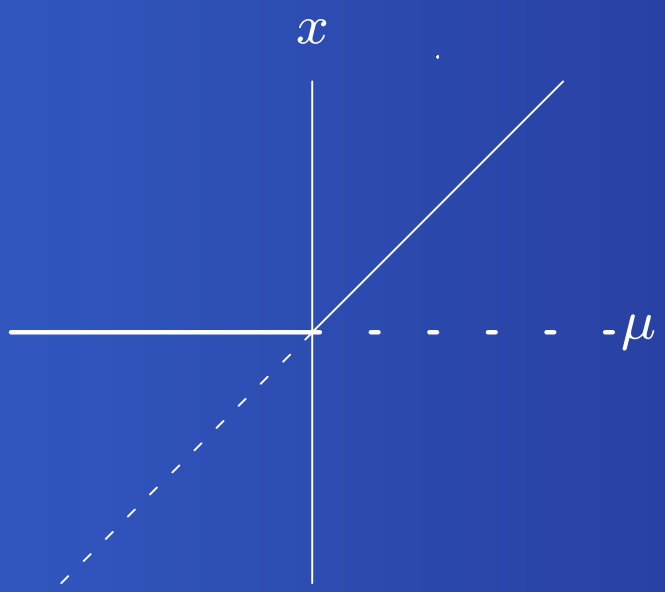
$f_{x^2n}(0,0) > 0,\ f_{x\mu}(0,0) > 0$



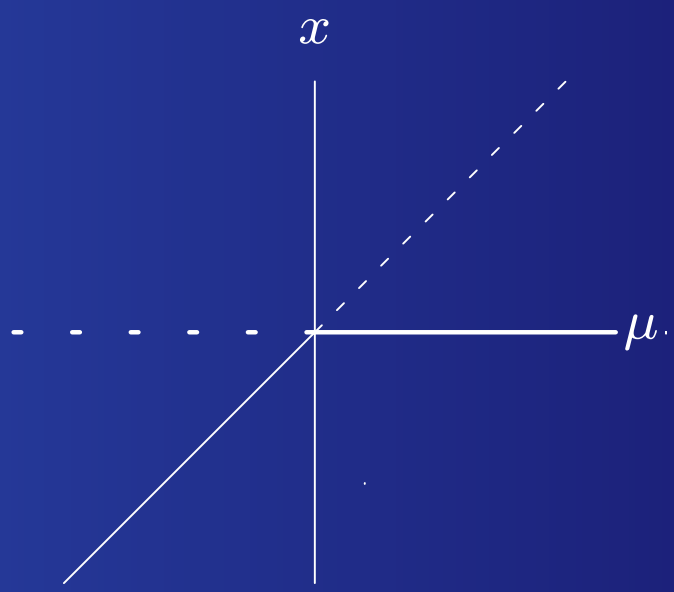
$f_{x^2n}(0,0) < 0,\ f_{x\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Transcritica

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——



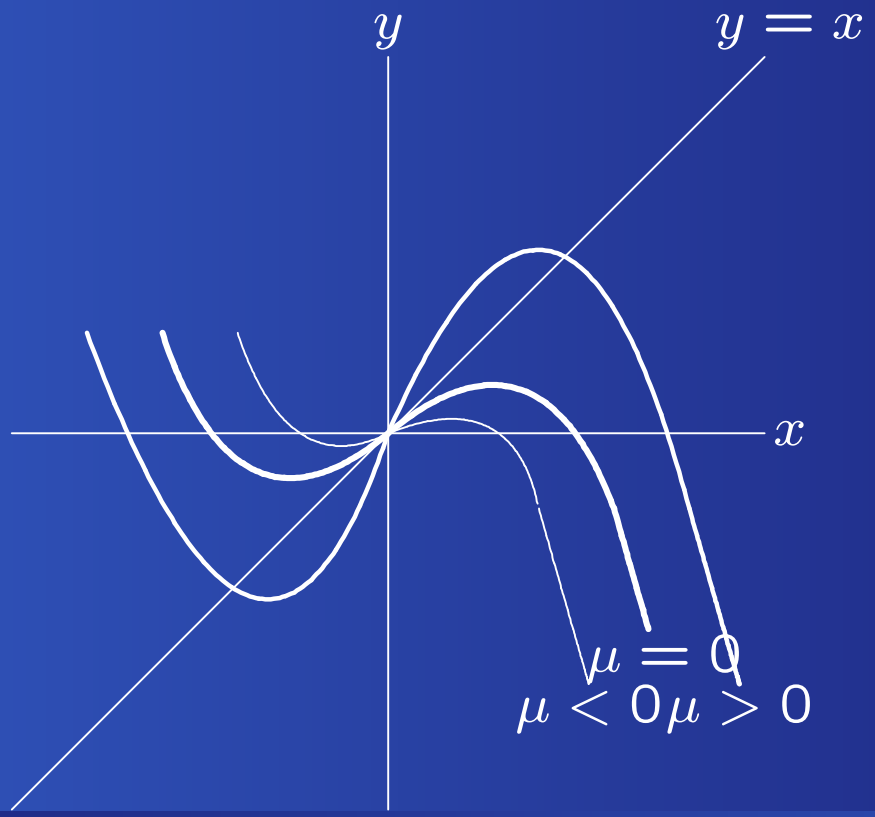
$f_{x^2n}(0,0) < 0,\ f_{x\mu}(0,0) > 0$



$f_{x^2n}(0,0) > 0,\ f_{x\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Pitchfork

La famiglia ha due curve di punti fissi nel piano x, μ: una che passa per l'origine di detto piano e cambiano la stabilità dei punti fissi quando passano l'origine e altra che è tangente all'origine.



Biforcazione Pitchfork

Teorema. (Classico) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^3, dove le applicazioni sono dispari con rispetto a la variabile di stato, i.e., $f(-x, \mu) = -f(x, \mu)$ e tale che $f_x(0, 0) = 1$. Supposto che la famiglia soddisfa le condizioni:

1. $f_{xxx}(0, 0) \neq 0$
2. $f_{x\mu}(0, 0) \neq 0$

Allora f presenta una biforcazione pitchfork.

Biforcazione Pitchfork

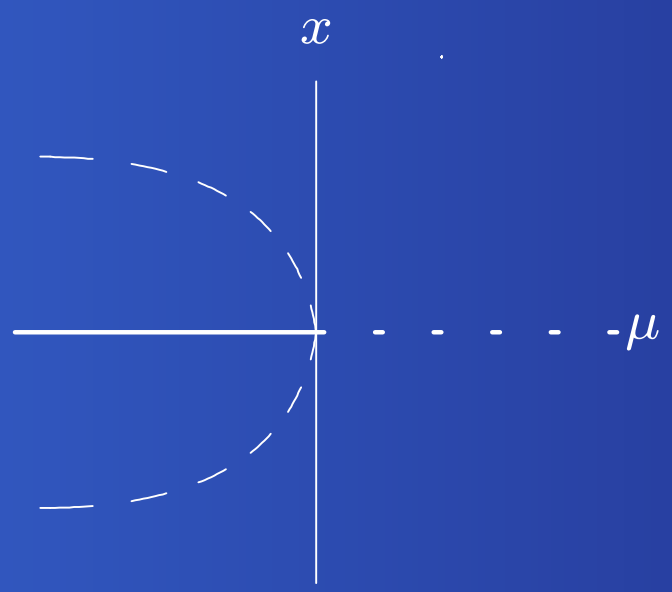
Teorema.(Nuovo) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^{2n+2}, che presenta nella funzione corrispondente al valore parametrico $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$, e tale che $f_x(0,0) = 1$, $f_\mu(0,0) = 0$.
Supposto che la famiglia soddisfa le condizioni:

1. $f_{xx}(0,0) = f_{xxx}(0,0) = \cdots = f_{x^{2n}}(0,0) = 0$, $f_{x^{2n+1}}(0,0) \neq 0$
2. $f_{x\mu}(0,0) \neq 0$

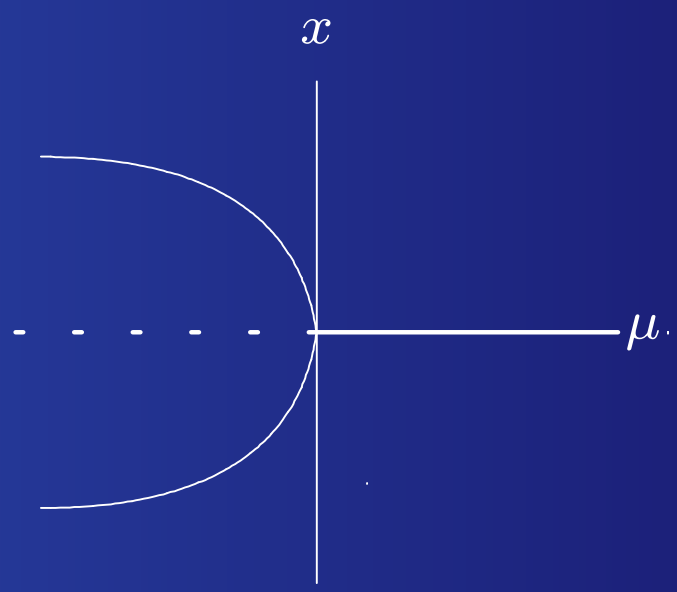
Allora f presenta una biforcazione pitchfork.

Biforcazione Pitchfork

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——



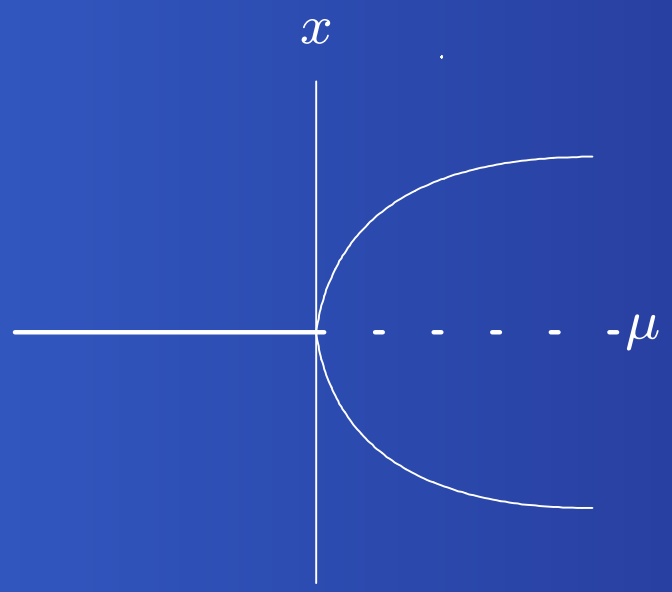
$f_{x^{2n+1}}(0,0) > 0,\ f_{x\mu}(0,0) > 0$



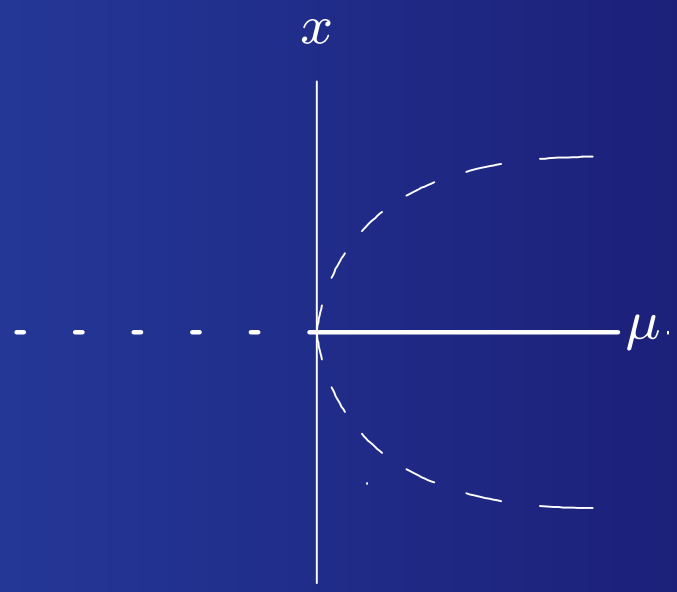
$f_{x^{2n+1}}(0,0) < 0,\ f_{x\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Pitchfork

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——



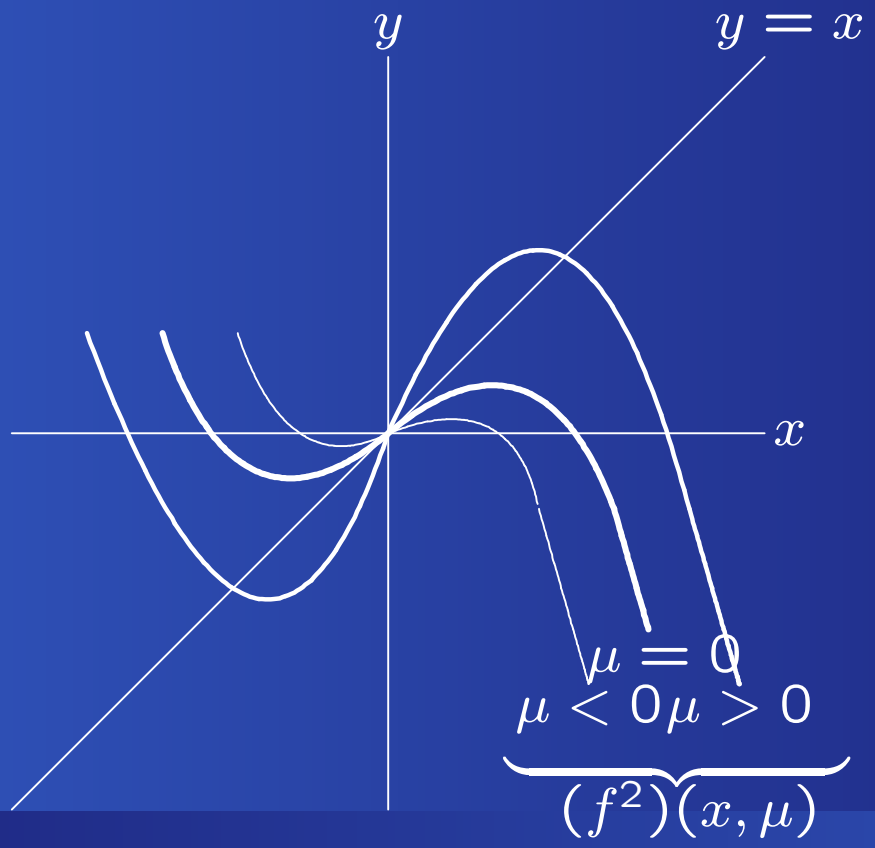
$f_{x^{2n+1}}(0,0) < 0,\ f_{x\mu}(0,0) > 0$



$f_{x^{2n+1}}(0,0) > 0,\ f_{x\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Flip

La famiglia ha due curve nel piano x, μ: una di punti fissi che passa per l'origine di detto piano e cambiano la stabilità dei punti fissi quando passano l'origine e altra di punti 2-periodici che è tangente all'origine.



Biforcazione Flip

Teorema. (Classico) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^3, che presenta in $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$ con autovalore -1.
Supposto che la famiglia soddisfa le condizioni:

1. $f^2_{xxx}(0,0) \neq 0$
2. $f_{x\mu}(0,0) \neq 0$

Allora f presenta una biforcazione flip.

Biforcazione Flip

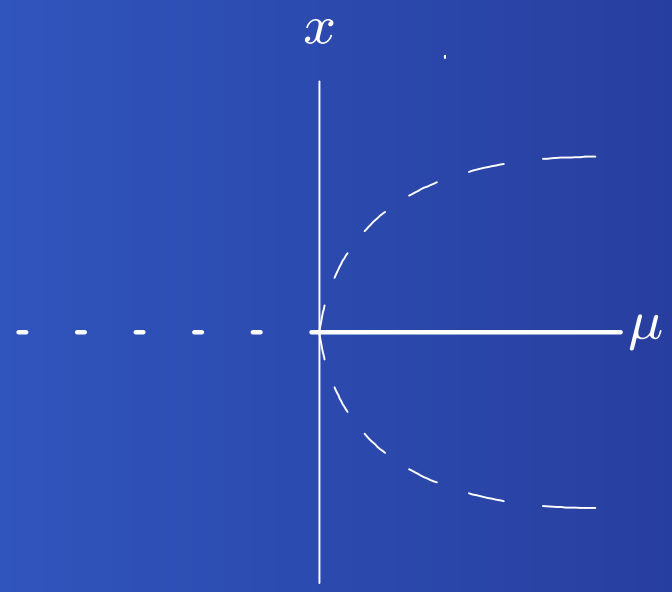
Teorema.(Nuovo) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una famiglia uniparametrica, con f di classe C^{2n+1}, che presenta in $\mu_o = 0$ il punto fisso $x_o = 0$ e tale che $f_x(0,0) = -1$.
Supposto che la famiglia sodisface le condizioni:

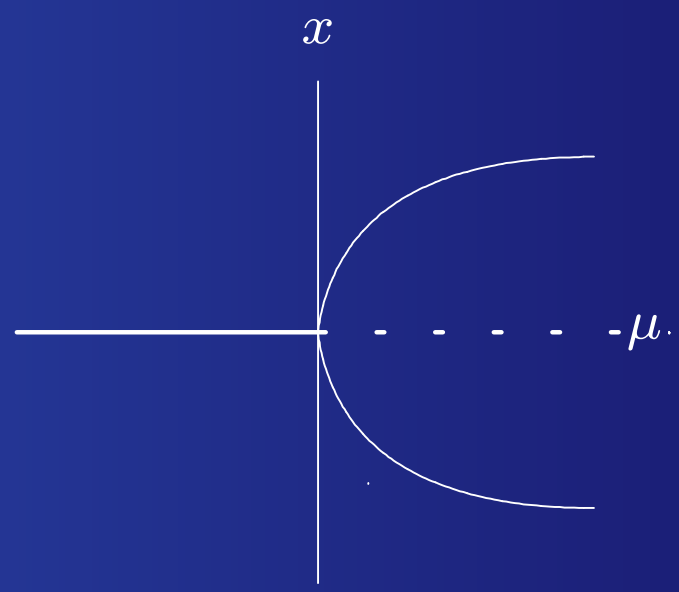
1. $(f^2)_{xxx}(0,0) = \cdots = (f^2)_{x^{2n}}(0,0) = 0$,
   $(f^2)_{x^{2n+1}}(0,0) \neq 0$
2. $f_{x\mu}(0,0) \neq 0$

Allora f presenta una biforcazione flip.

Biforcazione Flip

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——

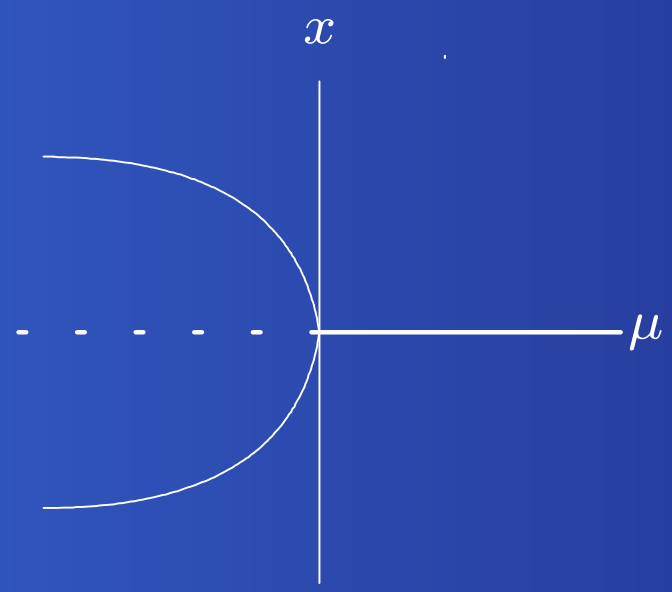


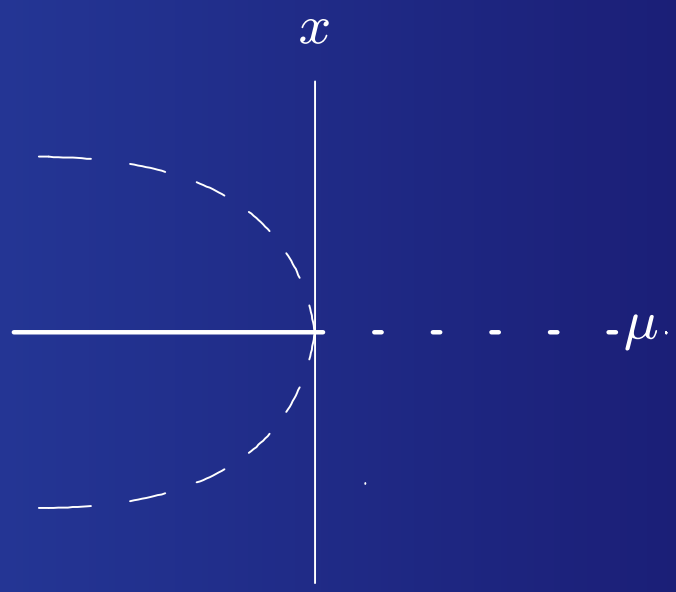


$(f^2)_{x^{2n+1}}(0,0) > 0,\ f_{x\mu}(0,0) > 0$ $(f^2)_{x^{2n+1}}(0,0) < 0,\ f_{x\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Flip

——DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE——





$(f^2)_{x^{2n+1}}(0,0) < 0,\ f_{x\mu}(0,0) > 0$ $(f^2)_{x^{2n+1}}(0,0) > 0,\ f_{x\mu}(0,0) < 0$

Biforcazione Neimark-Sacker

- Le funzioni del piano della famiglia $f(x, y; \mu)$ que presentano un punto fisso, presentano anche, dopo la biforcazione una curva invariante stabile oppure instabile.
- A differenza delle altre biforcazioni questa è una biforcazioni del piano.
- La dinamica nella curva invariante è molto interesante.

Biforcazione Neimark-Sacker

Teorema. (Classico) Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una famiglia uniparametrica di funzioni del piano reale, f di classe C^6, che verifica le seguenti condizioni in un intorno di $\mu = 0$:

1. $f(0, \mu) = 0$, i.e., $x = 0$ è un punto fisso per tutte le funzioni della famiglia in questo intorno.
2. $Df_x(0, \mu)$ ha autovalori complessi coniugati $\lambda(\mu)$ e $\overline{\lambda(\mu)}$ tali che per $\mu = 0$ suo modulo è $|\lambda(0)| = |\overline{\lambda(0)}| = 1$.
3. $\lambda = \lambda(0)$ non è radice m-ésima dell'unità per $m = 1, 2, 3, 4$. (Condizione di non risonanza).
4. $\dfrac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu}(0) > 0$. (Condizione di Hopf).

Biforcazione Neimark-Sacker

Allora esiste un cambio di coordinate, differenziabile rispetto a μ, tale che

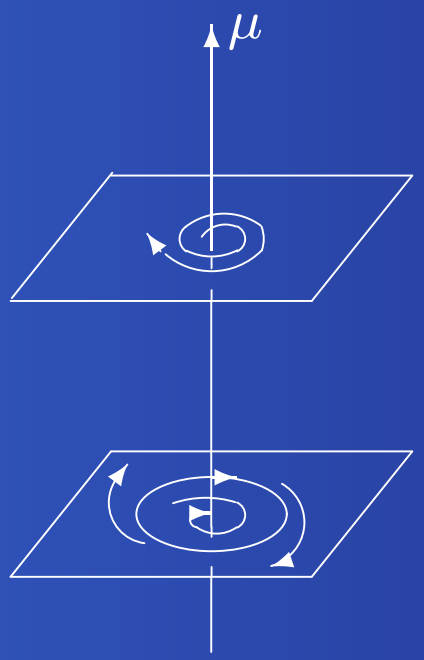
$$f(x,\mu) \sim g(z,\overline{z},\mu) = \lambda(\mu)z + c(\mu)z^2\overline{z} + \mathcal{O}(|z|^4), \quad z,\overline{z} \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

e poi esistono a, b, ϕ_o, ϕ_1 tali che, in coordinate polari, la imagine di ogni $(r,\theta;\mu)$ per f viene data come,

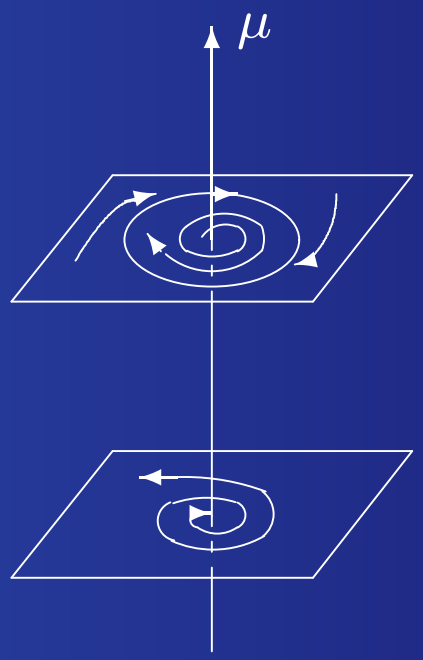
$$\big((1+\mu)r - ar^3 + \mathcal{O}(\mu r^3, \mu^2 r, r^5), \theta + \phi_o + \phi_1\mu + br^2 + \mathcal{O}(\mu^2, \mu r^2, r^3$$

Biforcazione Neimark-Sacker

- Se $a > 0$, la famiglia presenta una curva invariante e attrattiva per tutti i valori μ positivi sufficientemente piccoli.
- Se $a < 0$, la famiglia presenta una curva invariante e repulsiva per tutti i valori μ negativi sufficientemente piccoli.



Caso subcrítico ($a < 0$)



Caso supercrítico ($a > 0$)

Biforcazione Neimark-Sacker

Teorema.(Nuovo) Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una famiglia uniparametrica di funzioni del piano reale, con f di classe C^{2p+4}, che verifica le seguenti condizioni in un intorno di $\mu = 0$:

1. $f(0, \mu) = 0$, i.e., $x = 0$ è un punto fisso per tutte le funzioni della famiglia in questo intorno.
2. $Df_x(0, \mu)$ ha autovalori complessi coniugati $\lambda(\mu)$ e $\overline{\lambda(\mu)}$ tali che per $\mu = 0$ suo modulo è $|\lambda(0)| = |\overline{\lambda(0)}| = 1$.
3. $\lambda = \lambda(0)$ non è una radice m-ésima dell'unità per $m = 1, 2, 3, \ldots, (2p + 2)$.
   (Condizione di non risonanza)
4. $\frac{d|\lambda|}{d\mu}(0) \neq 0$
   (Condizione di Hopf)

Biforcazione Neimark-Sacker

Allora esiste un cambio di coordinate, differenziabile rispetto a μ, tale che:

$$f(x,\mu) \sim \lambda(\mu)z + \sum_{m=1}^{p} c_{2m+1}(\mu) z^{m+1}\bar{z}^{m} + \mathcal{O}(|z|^{2p+2}),$$

$z \in \mathbb{C},\ \mu \in \mathbb{R}$ e poi esistono $a_3, a_5, \ldots, a_{2p+1}, b_2, b_4, \ldots, b_{2p}, \phi_o, \phi_1$ tali che in coordinate polari l'immagine di ogni punto $(r, \theta; \mu)$ per f è

$$\left((1+\mu)r - \sum_{m=1}^{p} a_{2m+1} r^{2m+1} + \mathcal{O}(|\mu r^3| + \mu^2|r| + r^{2p+2}), \right.$$
$$\left. , \theta + \phi_o + \phi_1 \mu + \sum_{m=1}^{p} b_{2m} r^{2m} + \mathcal{O}(\mu^2 + |\mu| r^2 + |r|^{2p+1}) \right)$$

Biforcazione Neimark-Sacker

Se almeno uno dei a_{2m+1} è diverso da 0 e a_{2q+1} è il primo allora:

- Se $a_{2q+1} > 0$, $f(x, \mu)$ presenta una curva invariante e attrattiva per tutti i valori di μ positivi sufficientemente piccoli.
- Se $a_{2q+1} < 0$, $f(x, \mu)$ presenta una curva invariante e repulsiva per tutti i valori di μ negativi sufficientemente piccoli.

Biforcazione Neimark-Sacker

Dinamica sulla curva invariante

- Orbite quasiperiodiche dense o
- Un numero finito di orbite periodiche, che appaiono e poi scompaiono quando il parametro si muove

Biforcazione Neimark-Sacker

Come cambia la struttura delle orbite se il parametro si muove?

Abbiamo bisogno del *numero di rotazione* della funzione in la curva

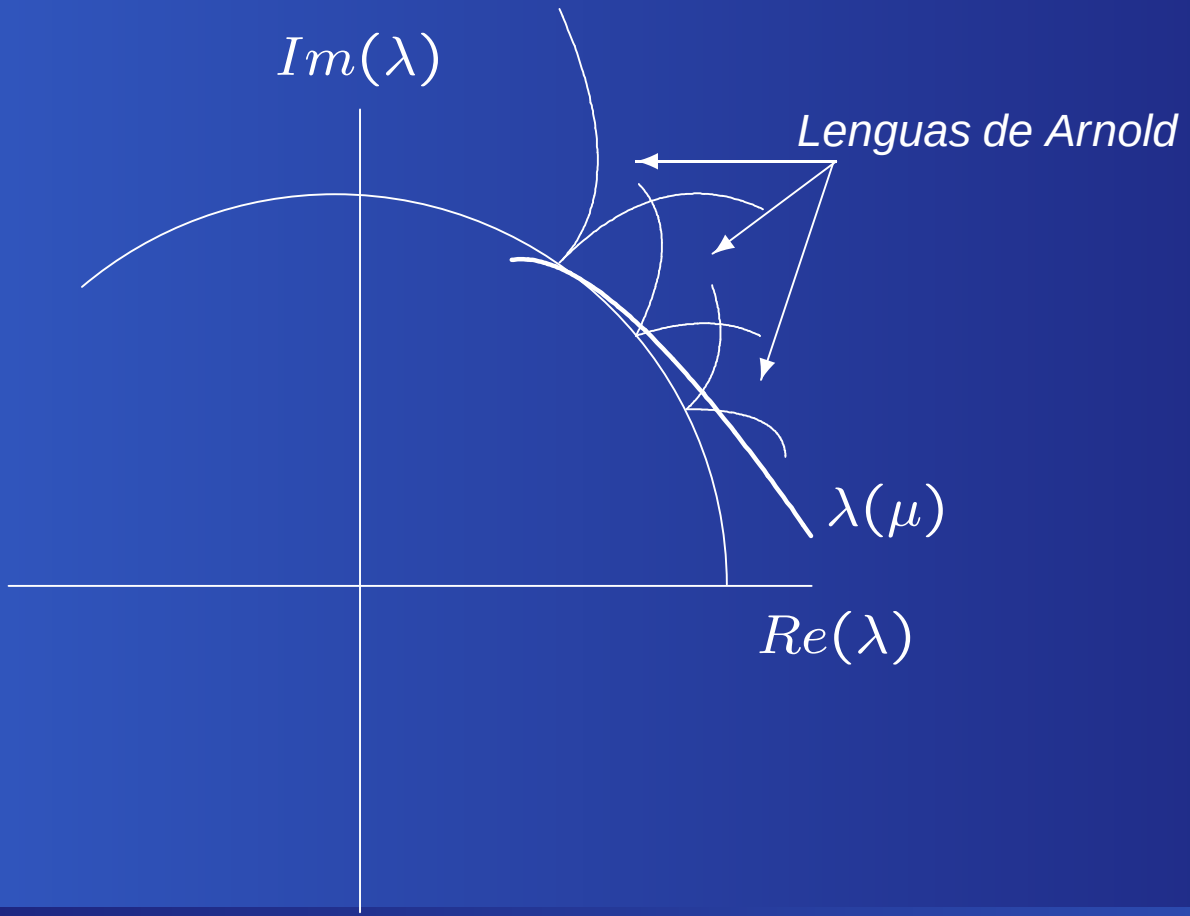
$$\rho(f) = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{f}(x) - x}{n} \right) \; mod \; 1,$$

in media l'angolo di movimento nella curva

- $\rho(f) = p/q$ razionale se e solo se f c'è (non neccessariamente unico) un punto di periodo q.
- $\rho(f)$ irrazionale allora f sulla curva invariante è topologicamente coniugata a una rotazione del circonferenza di angolo $2\pi\rho$ e poi tutte le orbite sono quasiperiodiche e dense.

Biforcazione Neimark-Sacker

L'applicazione sulla curva è strutturalmente stabile solo se ρ e razionale e esistono intervalli dove questo succede $\rightsquigarrow$ *Arnold Tongues*



Alcuni esempi in Economia

Alcuni esempi in Economia

Il modello originale di “Multiplier-Accelerator”

L’equazione

$$y_{t+1} = (a + c)y_t - ay_{t-1}, \quad 0 < c < 1, \quad 0 < a$$

che può essere riscritta come una funzione del piano data da

$$f(x, y) = ((a + c)x - ay, x)$$

oppure

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a + c & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alcuni esempi in Economia

Il modello originale di “Multiplier-Accelerator”

Se $(a+c)^2 < 4a$, gli autovalori sono complessi coniugati $\lambda, \overline{\lambda}$ e verificano

- $|\lambda| = \sqrt{a}$
- $Arg(\lambda) = \arccos(\frac{a+c}{2\sqrt{a}})$

Così se verificano le condizioni del teorema di Neimark-Sacker e possiamo sapere anche dove ci sono le Arnold Tongues.

Ma i modelli non sono di solito così semplici

Alcuni esempi in Economia

Il modello nonlinear di “Multiplier-Accelerator” di Hicks

L’equazione

$$y_{t+1} = cy_t + \max\{a(y_t - y_{t-1}, -D)\}, \quad 0 < c < 1, \quad 0 < a, \quad 0 < D$$

che può essere riscritta come una funzione del piano data da

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & y \leq x + D/a \\ f_2(x,y) & y > x + D/a \end{cases}$$

dove

$$f_1(x,y) = \begin{pmatrix} a+c & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f_2(x,y) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alcuni esempi in Economia

Il modello nonlinear di “Multiplier-Accelerator” di Hicks

- La funzione non è differenziabile e non possiamo applicare i teoremi primi.
- Però come nel caso differenziabile, il risultato della biforcazione è una curva invariante attrattiva homeomorfa alla circonferenza.
- Ma questa curva appare lontana dal punto e la sua posizione è dovuta alla retta critica.
- Sulla curva l’applicazione è una rotazione con numero di rotazione razionale o irrazionale.

Alcuni esempi in Economia

Il modello nonlinear di “Multiplier-Accelerator” di Hicks

Se $a = 1$ il punto fisso $(0, 0)$ è non-iperbolico e succede

- Numero di rotazione razionale $\Rightarrow$ poligono P invariante
  - Dentro al poligono, tutti i punti sono periodici.
  - Fuori dal poligono, tutti i punti arrivano in numero finito di iterazioni a un punto del poligono (eventualmente periodici)
- Numero di rotazione irrazionale $\Rightarrow$ regione invariante
  - Dentro alla regione, tutti i punti sono quasiperiodici.
  - Fuori dalla regione, tutti i punti arrivano in numero finito di iterazioni alla regione

Alcuni esempi in Economia

Il modello nonlinear di “Multiplier-Accelerator” di Hicks

Se $a > 1$ il punto fisso $(0, 0)$ è iperbolico e

- Se i parametri a, c sono nella regione di m/n-periodicitá invariante
  - Due orbite periodiche nella curva, attrattiva e saddle .
  - La curva invariante e allora “made up” per i punti dell’insieme instabile del saddle che si avvicinano all’attrattivo.

Conclusioni

Conclusioni

- Conoscere la possibile biforcazione e soprattuto le orbite periodiche, può darci una preziosa informazione del sistema.
- Piu differenziabilità permette a volte di conoscere se c‘è una biforcazione.
- Piu differenziabilità permette a volte di conoscere se c‘è una forma normale di maggiore ordine.
- Ciò che succede per famiglie differenziabili può suggerire un’idea per famiglie non-differenziabili, ma non è niente sicuro.

Lavoro Futuro

Lavoro Futuro

Trovare condizioni sufficienti che permettano di sapere dell'esistenza delle biforcazioni di famiglie non-differenziabili.

Bibliografia

Bibliografia

1. F. Balibrea y J.C. Valverde [1999]. Bifurcations Under Non-degenerated Conditions of Higher Degree and a New Simple Proof of the Hopf-Neimark-Sacker Bifurcation Theorem, *J. Math. Anal. Appl.* **237**, 93-105.
2. F. Balibrea y J.C. Valverde [2001]. Structural Stability under Conditions of Non-Hyperbolicity. *Comput. Math. Appl.* **41**, 757-768.
3. F. Balibrea y J.C. Valverde [2000]. Extreme Degenerations for the Simplest Generic Bifurcations and New Transversally Conditions. Volumen especiale aggregato al **Volumen 6** di *Discrete and Continuous Time Dynamical Systems*, 22-30.

Biforcazioni dei Sistemi Dinamici: Alcuni Esempi in Economia

José Carlos Valverde

Università di Castilla-La Mancha, SPAGNA.

17 Febbraio 2005, Macerata, ITALIA.